

| Titre                                         | Catégories | Thèmes                                          | Origine               |
|-----------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------|-----------------------|
| 1. Le collier de Paola                        | 3          | Arithmétique : somme, moitié                    | SI                    |
| 2. Les collectionneurs                        | 3 4        | Déduction, Relation d'ordre                     | SI                    |
| 3. Mathématiques dans la salle de gymnastique | 3 4        | Arithmétique : répétition de séquence, division | SI                    |
| 4. Cherchez la petite bête                    | 3 4 5      | Arithmétique, équations                         | BB                    |
| 5. Le pâtissier                               | 3 4 5      | Déduction                                       | 13 <sup>e</sup> RMT-I |
| 6. Pyramides                                  | 4 5        | Géométrie : empilements, arithmétique           | SI                    |
| 7. Le carré change de forme (1)               | 4 5        | Géométrie : agencement de formes, isométrie     | SI                    |
| 8. Les allumettes                             | 5 6        | Périmètre                                       | BB                    |
| 9. Huit triangles dans un carré               | 5 6        | Géométrie : partage en triangles identiques     | fj, RZ                |
| 10. Les chocolats de Zoé                      | 5 6 7      | Aritmétique : nombres avec 5 diviseurs          | BB                    |
| 11. Dates particulières                       | 6 7        | Aritmétique                                     | SI                    |
| 12. Collection de cartes postales             | 6 7 8      | Aritmétique : division euclidienne              | PU                    |
| 13. Pyramides bicolores                       | 6 7 8 9    | Géométrie : empilements, arithmétique           | SI                    |
| 14. Le carré change de forme (2)              | 6 7 8 9 10 | Géométrie : agencement de formes, isométrie     | SI                    |
| 15. Carrés magiques multiplicatifs            | 7 8 9 10   | Arithmétique: produits de puissances de 2       | AO                    |
| 16. Triangles étrangers                       | 7 8 9 10   | Géométrie: triangles de même périmètre          | SR                    |
| 17. Soupe en promotion                        | 8 9 10     | Géométrie 3D, pourcentages                      | FC                    |
| 18. Le tapis roulant                          | 8 9 10     | Vitesse, espace, temps                          | FC                    |
| 19. Les cubes de l'année                      | 9 10       | Géométrie 3D : parallélépipède rectangle        | fj                    |
| 20. Nombres polygonaux                        | 10         | Arithmétique, nombres figurés, suites           | fj                    |

## 1. LE COLLIER DE PAOLA (Cat. 3)

Paola a un collier qui est fait avec 24 perles rouges.

Elle veut faire un collier plus grand en utilisant ces 24 perles rouges et en ajoutant d'autres perles rouges et des perles jaunes.

Elle ajoute le même nombre de perles rouges que de perles jaunes. Son nouveau collier a en tout 50 perles.

**Combien y a-t-il de perles rouges dans le nouveau collier de Paola ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

- Déterminer la somme de 24 et de la moitié du complément de 24 à 50.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre la situation évoquée de dénombrement de perles de deux types dans la recombinaison d'un collier.
- Appui sur une procédure figurative :  
Dessiner les 24 perles rouges du collier initial et ajouter simultanément une perle rouge et une perle jaune en comptabilisant à chaque ajout le nombre total de perles dessinées (comptage de 1 en 1 ou de 2 en 2 à partir de 24 ou addition de 1 ou 2) jusqu'à arriver à 50 perles.  
Dénombrer les perles rouges ajoutées, ajouter ce nombre à 24 pour trouver le nombre de perles rouges du nouveau collier.

Ou

- procédure non figurative utilisant un surcomptage :  
Ajouter des 2 ou compter de 2 en 2 à partir de 24 jusqu'à arriver à 50. Compter le nombre de 2 ajoutés, ce qui donne le nombre de perles rouges ajoutées (13). Ajouter ce nombre à 24 pour trouver le nombre de perles rouges du nouveau collier.

Ou

- procédure arithmétique :  
Déterminer le complément de 24 à 50 (26) pour avoir le nombre de perles ajoutées puis la moitié de 26 pour avoir le nombre de pièces rouges ajoutées (13). Terminer en ajoutant 13 à 24 pour trouver 37.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (37 perles rouges) avec présentation de la démarche suivie (dessin avec explication de la manière de dénombrer les perles rouges ou les calculs effectués, par exemple  $24 + 13 + 13 = 50$  et  $24 + 13 = 37$  avec leur signification).
- 3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou imprécises (par exemple calculs sans explications).
- 2 Réponse correcte sans explications.  
Ou réponse erronée consécutive à une erreur de dénombrement ou de calcul mais avec une procédure correcte.  
Ou réponse 13 perles rouges qui correspond au nombre de perles rouges ajoutées, avec explications détaillées
- 1 Début de raisonnement correct montrant la compréhension des deux contraintes : 50 perles en tout et autant de rouges ajoutées que de jaunes.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveau : 3**

**Origine:** Sienne (d'après 11<sup>e</sup> RMT, Epreuve 1, problème 6)

## 2. LES COLLECTIONNEURS (Cat. 3, 4)

Claude, André, Jacques, Thibault et Lise collectionnent des voitures miniatures.

André et Jacques ont à eux deux autant de voitures que Claude.

Thibault a moins de voitures que Jacques, mais ce n'est pas lui qui en a le moins de tous.

Lise a deux voitures de plus que Claude.

**Ecrivez les prénoms des enfants dans l'ordre, de celui qui a le moins de voitures à celui qui en a le plus.**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Ordonner cinq nombres inconnus à partir d'informations données sur l'ordre de certains de ces nombres et de relations additives qui les lient.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faudra ordonner les cinq personnages selon le nombre de voitures qu'ils possèdent, selon les conditions données.
- Comprendre que les relations additives qui lient deux nombres ne sont données que pour informer de l'ordre dans lequel ils sont rangés. Interpréter la première condition en comprenant que si le nombre de voitures de Claude est la somme des nombres de voitures de André et Jacques, ces deux derniers sont inférieurs au premier.
- Trier et organiser les informations pour en déduire l'ordre dans lequel les cinq nombres inconnus vont se ranger.

Des stratégies possibles :

- Faire une hypothèse sur le nombre de voitures que possède chaque enfant. Par exemple à partir de la première condition fixer : André 2, Jacques 4 et Claude 6. La seconde information dit que Thibault en a moins de Jacques, mais plus qu'André, alors il pourrait en avoir 3. De la dernière information déduire que Lise aurait 8 voitures. Selon l'hypothèse faite au départ, cette stratégie peut donner lieu à des essais longs et fastidieux.

Remarque : Dans le même ordre d'idée, l'hypothèse initiale pourrait être Jacques 2, André 4 et Claude 6. Mais cela conduirait à Thibault 1 ce qui est contradictoire avec le fait que ce n'est pas Thibault qui en a le moins de tous.

Ou

- Faire le choix d'une information pour ordonner deux personnages, puis en utiliser une autre pour tenter de ranger les autres personnages par rapport à ceux déjà ordonnés. Pour cela utiliser une représentation schématique (étiquettes avec les prénoms, dessins, ligne orientée, flèches...) et placer les prénoms les uns par rapport aux autres au fur et à mesure du traitement des informations données.

Par exemple :

Commencer par la première condition pour déterminer que Claude est avant André et Jacques (il reste une incertitude sur les positions relatives de André et Jacques) ;

Utiliser la troisième condition pour placer Lise avant Claude (sans effet sur les deux autres qui suivent) ;

La deuxième condition permet de lever l'incertitude sur André et Jacques en plaçant Thibault après Jacques et avant André.

- Une fois terminé, contrôler que l'ordre trouvé pour les cinq enfants est compatible avec toutes les informations de l'énoncé.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (André, Thibault, Jacques, Claude, Lise) avec des indications qui permettent de comprendre comment a été trouvée la place des enfants les uns par rapport aux autres.
- 3 Réponse correcte avec des indications qui permettent de comprendre comment a été trouvée la place d'au moins un enfant : par exemple la place de Claude par rapport à André et Jacques et la place de Thibault ou de Lise.  
Ou, réponse correcte accompagnée de "Nous avons vérifié".
- 2 Réponse correcte sans indication supplémentaire.  
Ou réponse dans l'ordre inverse avec des indications qui permettent de comprendre comment a été trouvée la place des

enfants les uns par rapport aux autres.

Ou réponse (Thibault, Jacques, André, Claude, Lise) avec des indications sur le raisonnement utilisé.

1 Réponse qui tient compte de deux des quatre conditions

Ou début de recherche cohérente (par exemple déduction correcte des informations additives).

0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 3, 4

**Origine :** Sienne

### 3. MATHEMATIQUES DANS LA SALLE DE GYMNASTIQUE (Cat. 3, 4)

Dans la salle de gymnastique, Marc suit un parcours avec un ballon qu'il fait rebondir sur le sol et qu'il lance en l'air.

Il commence par quatre rebonds du ballon sur le sol suivis d'un lancer en l'air. Il continue de la même façon, quatre rebonds puis un lancer, jusqu'à la fin du parcours.

Luc compte le nombre de rebonds et de lancers de Marc sur tout le parcours. Il y en a 87 en tout.

**Combien de rebonds sur le sol a fait le ballon de Marc ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Exploiter la régularité d'une séquence de deux événements d'amplitude 5 pour déterminer le nombre de fois où se produit l'un des deux événements connaissant le nombre total d'événements.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre que 87 correspond à la succession à l'identique d'une combinaison de rebonds sur le sol et de lancers en l'air et qu'il s'agit de répartir ces 87 événements en rebonds et lancers.
- Effectuer une représentation figurative ou schématique de la totalité des rebonds et lancers, et dénombrer les rebonds.

Ou

- Déterminer la longueur d'une séquence (5 événements correspondant chacun à 4 rebonds et 1 lancer) et chercher le nombre de séquences de 5 événements contenues dans 87, soit par comptage de 5 en 5, addition de 5, essais multiplicatifs ou multiplication à trou. Interpréter le comptage ou les calculs effectués pour déterminer le nombre de séquences (17) et le nombre d'événements (85). Calculer le nombre de rebonds contenus dans ces 17 séquences ( $17 \times 4 = 68$ ) et comprendre que les deux événements manquant pour atteindre 87 sont deux rebonds, ce qui représente un total de 70 rebonds.

Selon la procédure numérique utilisée, les élèves peuvent faire des erreurs de comptage ou de calcul et d'interprétation de ceux-ci. Ils peuvent également oublier le complément à 87 ou ne pas savoir l'interpréter.

Ou

- Combiner les deux stratégies : commencer par une procédure figurative ou schématique, prendre conscience de la régularité de la séquence de 5 événements et engager ensuite une procédure numérique. Le recours dans un premier temps au dessin peut aider ensuite à l'interprétation des calculs.

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (70 rebonds) avec explications claires (un dessin complet permettant de différencier rebonds et lancers, un dessin incomplet mais accompagné d'une explication qui le complète, calculs et interprétation des calculs)
- 3 Réponse correcte sans explication ou avec une explication très incomplète (dessin incomplet seul ou quelques calculs)  
Ou réponse erronée 68 avec oubli des deux derniers rebonds, mais explications claires pour le reste
- 2 Réponse erronée (17) correspondant au nombre de séquences, avec dessin ou calcul, ou correspondant encore à l'inversion du nombre de rebonds et de celui de lancers  
Ou réponse erronée due à des erreurs de calcul, mais dessin ou explication fournis attestant d'un raisonnement correct
- 1 Début de recherche correcte (dessin inachevé ou calcul inabouti) attestant de la compréhension de l'existence d'une séquence régulière de 4 rebonds et 1 lancer qui se répète.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux:** 3, 4

**Origine:** Sienne

#### 4. CHERCHEZ LA PETITE BÊTE (Cat. 3, 4, 5)

Voici des additions très étranges.

Les nombres ont été remplacés par des petites bêtes : un escargot, une mouche, une coccinelle et un papillon.

Chaque petite bête remplace toujours le même nombre.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Escargot} + \text{Escargot} + \text{Mouche} + \text{Mouche} + \text{Coccinelle} & = & 73 \\
 \text{Coccinelle} + \text{Mouche} + \text{Coccinelle} + \text{Mouche} + \text{Mouche} & = & 57 \\
 \text{Coccinelle} + \text{Coccinelle} + \text{Coccinelle} + \text{Coccinelle} + \text{Coccinelle} & = & 75 \\
 \text{Mouche} + \text{Coccinelle} + \text{Papillon} + \text{Coccinelle} + \text{Escargot} & = & 80
 \end{array}$$

Trouvez à quel nombre correspond chaque petite bête.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Trouver quatre nombres qui sont les termes de quatre sommes, chaque somme étant composée de cinq termes

##### Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque petite bête dessinée représente toujours le même nombre.
- Procéder par déduction :
  - o Observer les dessins et comprendre qu'il faut commencer par la ligne 3 où figurent seulement 5 coccinelles et déduire la valeur d'une coccinelle :  $75 / 5 = 15$  ou  $5 \times 15 = 75$  ;
  - o Poursuivre par la ligne 2 et remplacer les 2 coccinelles par leur valeur ( $15 \times 2 = 30$ ) ; en déduire que 3 mouches valent 27 ( $57 - 30 = 27$ ) et qu'une mouche vaut 9 ( $27 / 3 = 9$  ou  $3 \times 9 = 27$ ) ;
  - o Poursuivre par la ligne 1 et remplacer la coccinelle et la mouche par leur valeur ( $(2 \times 9) + 15 = 33$ ) ; en déduire la valeur de deux escargots ( $73 - 33 = 40$ ) et la valeur d'un seul ( $40 / 2 = 20$  ou  $2 \times 20 = 40$ ) ;
  - o Terminer par la ligne 4 et remplacer la mouche, les deux coccinelles et l'escargot par leur valeur ( $9 + (2 \times 15) + 20 = 59$ ) ; en déduire la valeur d'un papillon ( $80 - 59 = 21$ ).

Ou

- Utiliser une procédure mixte faite de déductions partielles et d'essais, par exemple en commençant par trouver la valeur à donner à une coccinelle à partir de la troisième égalité...

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Coccinelle = 15 ; Mouche = 9 ; Papillon = 21 ; Escargot = 20) avec description claire de la démarche (explicitation de l'ordre des phases et calculs ou essais).
- 3 Réponse correcte avec description peu claire ou avec seulement une vérification.  
Ou Procédure correcte et bien expliquée mais réponse incorrecte suite à une erreur de calcul.
- 2 Réponse correcte sans description de la démarche.  
Ou 2 ou 3 valeurs justes avec description peu claire.
- 1 Valeur de la coccinelle juste avec indication sur la procédure utilisée.

Ou Début de raisonnement correct (par exemple essais apparents, montrant que la même valeur est attribuée à chaque petite bête au moins dans 2 égalités différentes).

0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 3, 4, 5

**Origine :** Bourg en Bresse

## 5. LE PÂTISSIER (Cat. 3, 4, 5)

Un pâtissier a préparé cinq gâteaux pour cinq de ses clients : Anne, Brice, Carla, Dany et Elise.

Voici les 5 gâteaux :

- un gâteau aux pommes et à la crème
- un gâteau aux fraises et à la crème
- un gâteau aux pommes sans crème
- un gâteau aux fraises sans crème
- un gâteau au chocolat.

Malheureusement, le pâtissier ne se souvient plus de ce que chaque client a commandé. Il se souvient cependant que :

- Anne achète seulement des gâteaux dans lesquels il y a fruits ;
- Carla et Dany veulent toujours des gâteaux aux fraises ;
- Elise et Carla n'aiment ni les gâteaux à la crème ni les gâteaux au chocolat.

**Retrouvez le gâteau commandé par chaque client.**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Mettre en relation univoque 5 objets et 5 personnes, à partir d'indications données sous forme affirmative ou sous forme négative.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que les informations données permettent ou interdisent certaines associations.
- Procéder par déductions, par exemple :  
Anne peut avoir tous les gâteaux sauf le gâteau au chocolat ;  
Carla et Dany ne peuvent avoir que les 2 gâteaux aux fraises, ce qui fait que les autres clients ne peuvent pas les avoir ;  
Carla ne peut avoir que le gâteau sans crème aux fraises, donc Dany aura le gâteau à la crème et aux fraises  
Elise ne peut avoir que le gâteau sans crème aux pommes (le gâteau sans crème à la fraise étant déjà attribué à Dany) ;  
Pour Anna, il ne reste alors que le gâteau à la crème et aux pommes ;  
Et pour Brice, il ne reste que le gâteau au chocolat (ce gâteau aurait d'ailleurs pu lui être attribué dès le départ compte tenu des informations sur les autres clients).

Ou

- Procéder par essais et déductions, en attribuant un ou plusieurs gâteaux à un ou des clients et en vérifiant la compatibilité avec les informations données.

Remarque : Une solution utilisant un tableau est envisageable, mais très peu probable à ce niveau de la scolarité.

#### Attribution des points

4. Solution correcte (Anne : crème et pommes ; Brice : chocolat ; Carla : sans crème et fraises ; Dany : crème et fraises ; Elise : sans crème et pommes), avec démarche claire (suite de déductions, organisation en liste ou tableau) ou vérification de l'adéquation entre la réponse établie et les contraintes de l'énoncé.
3. Solution correcte, mais avec des explications ou vérifications incomplètes ou imprécises (par exemple, quelques déductions sont explicitées, mais pas les autres).
2. Solution correcte sans explication ou vérification.  
ou 3 ou 4 associations correctes, avec justifications pertinentes.
1. 2 associations correctes, avec ou sans justifications
0. Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine :

Sienne,

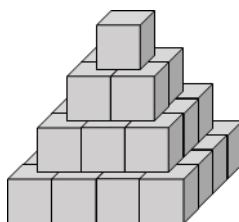
d'après

13.I.3



## 6. PYRAMIDES (Cat. 4, 5)

Alexandre possède un grand nombre de cubes gris avec lesquels il construit des tours ayant la forme de pyramides, comme celle que vous voyez sur le dessin.



Les règles de construction qu'il utilise sont les suivantes :

- Le dernier étage de la tour est formé d'un seul cube ;
- Chaque étage a la forme d'un carré, sans vide entre les cubes.

Aujourd'hui, Alexandre a utilisé 204 cubes gris pour construire sa tour.

**Combien d'étages a sa tour ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique :

Trouver les carrés des premiers nombres entiers naturels et en faire la somme pour obtenir 204.

#### Analyse de la tâche

- Interpréter correctement l'image. Comprendre que pour certains cubes on voit trois faces, pour d'autres deux faces, pour d'autres encore une face et qu'il y a des cubes qu'on ne voit pas. Comprendre que chaque étage est formé (à l'exception du dernier) par des cubes assemblés les uns contre les autres de manière à former un carré. Comprendre que le nombre de cubes sur le côté de chaque étage augmente de un quand on passe d'un étage à l'étage immédiatement inférieur.
- Comprendre que pour trouver le nombre de cubes utilisés pour chaque étage, il faut multiplier le nombre de cubes placés sur un côté de l'étage par lui-même.
- Pour trouver le nombre d'étages de la pyramide, procéder par essais : par exemple commencer avec une base de 6 x 6. Puis ajouter  $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91$  et remarquer qu'on n'a pas utilisé assez de cubes. Ajouter un étage  $7 \times 7 = 49$  et réaliser que ça ne suffit toujours pas ; ajouter encore  $8 \times 8 = 64$  et constater qu'alors on a utilisé 204 cubes. Conclure que la tour a huit étages.

Ou, retirer progressivement de 204 les nombres de cubes utilisés pour chaque étage en commençant par l'étage supérieur jusqu'au 8e niveau et constater alors que tous les cubes ont été utilisés :  $204 - 1 = 203$  ;  $203 - 4 = 199$  ;  $199 - 9 = 190$  ...  $113 - 49 = 64$  ;  $64 - 64 = 0$

Ou, comprendre comment calculer le nombre de cubes à chaque étage et procéder à partir du haut vers le bas, et additionner pour atteindre le total de 204 cubes :

$$1 + 4 = 5; 5 + 9 = 14; 14 + 16 = 30; 30 + 25 = 55; 55 + 36 = 91; 91 + 49 = 140; 140 + 64 = 204.$$

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (8 étages) avec description claire des étapes suivies (les calculs seuls conviennent)
- 3 Réponse correcte avec description peu claire ou incomplète, par exemple absence de certains calculs, mais la procédure suivie est compréhensible  
Ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul mais l'ensemble de la procédure est décrite en détail
- 2 Réponse correcte sans explications  
Ou réponse erronée due à deux erreurs de calcul, avec indications sur la procédure utilisée.
- 1 Début de recherche cohérente, par exemple début de calcul des nombres de cubes utilisés aux premiers étages, mais la recherche est inachevée
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 4, 5

**Origine :** Sienne

## 7. LE CARRÉ CHANGE DE FORME (I) (Cat. 4, 5)

Carlo a tracé un segment à l'intérieur d'un carré de 4 carreaux de côté et il a découpé le carré le long de ce segment.

Carlo a ensuite cherché à construire d'autres figures en assemblant les deux pièces obtenues en respectant cette règle :

Les deux pièces doivent être assemblées en faisant coïncider deux côtés de même longueur.

Voici deux des figures qu'on peut obtenir.

Pour construire la figure B, la pièce triangulaire a été retournée

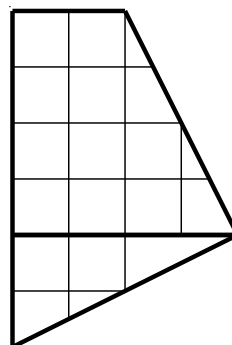
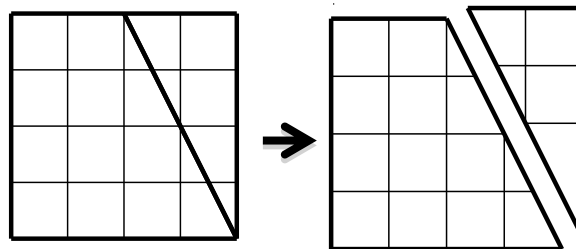


Figure A

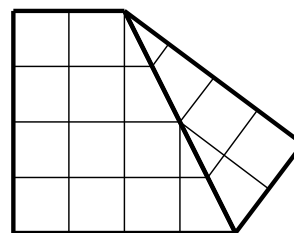


Figure B

Et voici deux exemples de figures qui ne conviennent pas.

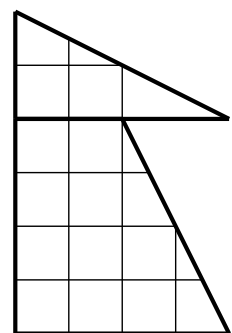


Figure C

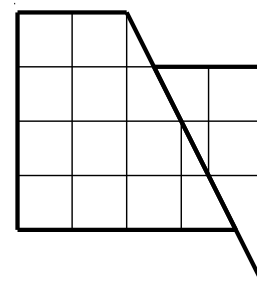
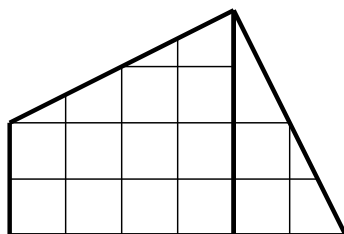
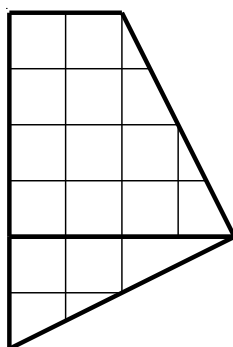
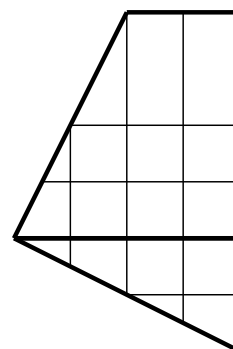


Figure D

Voici un exemple d'une même figure placée dans trois positions différentes



La figure a été tournée



La figure a été retournée

Une figure est différente d'une autre s'il n'est pas possible de la superposer à l'autre en la tournant ou en la retournant.

Cherchez toutes les figures différentes, autres que le carré et que les figures A et B, qu'on peut obtenir en assemblant les deux pièces et en respectant la règle d'assemblage.

Collez ou dessinez les figures que vous obtenez, autres que les figures A et B,.

## ANALYSE A PRIORI

### Tâche mathématique

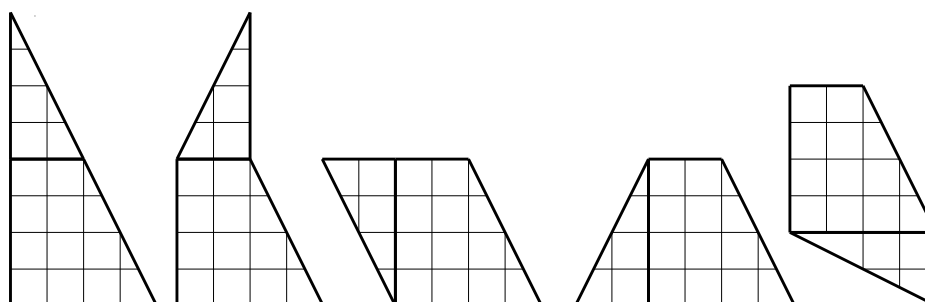
Trouver tous les polygones qu'il est possible d'obtenir en assemblant par des côtés de même longueur les deux polygones obtenus à partir du partage d'un carré en deux.

### Analyse de la tâche

- Comprendre la contrainte (assemblage par deux côtés de même longueur et qu'on fait coïncider).
- Savoir reconnaître une même figure dans des orientations différentes ou retournée.

Stratégies possibles :

- Essais non organisés d'assemblages des deux pièces. La difficulté consiste alors à différencier une nouvelle figure d'une figure déjà construite et de les trouver toutes.
- Recherche méthodique :  
Repérage sur chacune des pièces des côtés qu'on peut faire coïncider,  
L'hypoténuse du triangle rectangle ne peut être rattachée au trapèze que par son côté oblique ;  
Le petit côté de l'angle droit du triangle rectangle ne peut être rattaché au trapèze que par sa petite base  
Le grand côté de l'angle droit du triangle rectangle peut être rattaché au trapèze par deux de ses côtés.  
Pour chaque paire de côtés qui peuvent coïncider, réalisation de l'assemblage avec les deux pièces côté recto et de l'assemblage avec une pièce recto et l'autre verso.  
Retirer des figures construites les figures A et B.
- Les cinq solutions autres que les figures A et B :



### Attribution des points

- Réponse correcte (les cinq figures sans doublons, ni figure erronée)  
Ou les 5 figures correctes (sans doublons, ni figure erronée) avec en plus l'une des deux figures A et B ou les deux
- Les 5 figures correctes (sans figure erronée) avec au plus deux doublons et éventuellement en plus l'une des deux figures A et B ou les deux, et peut-être aussi le carré  
Ou 4 figures correctes (sans doublons, ni figure erronée) avec éventuellement en plus l'une des deux figures A et B ou les deux, et peut-être aussi le carré
- 4 figures correctes (sans figure erronée) avec au plus deux doublons et éventuellement en plus l'une des deux figures A et B ou les deux, et peut-être aussi le carré  
Ou 3 figures correctes (sans doublons, ni figure erronée) avec éventuellement en plus l'une des deux figures A et B ou les deux, et peut-être aussi le carré
- Présence de deux figures correctes (sans figure erronée ni doublon ou sans figure erronée mais avec des doublons ou avec au plus deux figures erronées) et en plus l'une des deux figures A et B ou les deux, et peut-être aussi le carré
- Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : Sienne

## 8. ALLUMETTES (Cat. 5, 6)

Eliott a quatre carrés en carton tous identiques et une boîte d'allumettes.

Il colorie le premier en gris (figure A) et colle 16 allumettes le long des côtés, sans en couper ou en superposer une seule. Les 16 allumettes forment parfaitement le pourtour du carré.

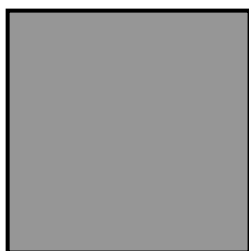


Figure A

Puis, dans les autres carrés, Eliott dessine trois figures grises comme sur les dessins ci-dessous. Il choisit les longueurs des côtés des figures grises de façon à pouvoir coller des allumettes tout autour de chaque figure sans couper une seule allumette ou en superposer deux.

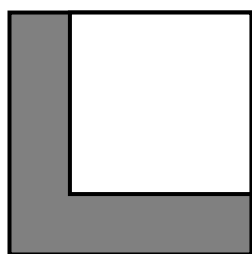


Figure B

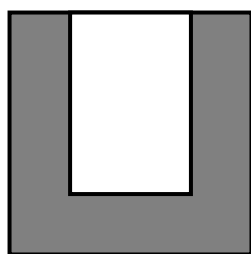


Figure C

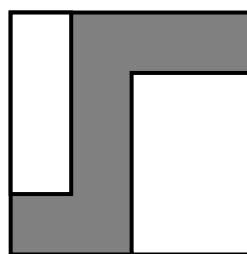


Figure D

**De combien d'allumettes Eliott-a-t-il encore besoin ?**

**Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver la somme des périmètres de trois polygones dessinés dans des carrés identiques et dont les côtés sont parallèles aux côtés des carrés, après avoir identifié une unité de mesure adéquate.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre à partir des données du premier carré que sur chacun de ses côtés on peut coller 4 allumettes ( $16 : 4$ ) et en estimant, à vue ou en recourant à des mesures, que dans les autres figures le côté le plus court correspond à une allumette.
  - Reporter cette unité de mesure sur les côtés des 3 autres figures et en trouver le périmètre
    - 16 pour la figure B : 4, 4, 3, 3, 1, 1,
    - 22 pour la figure C : 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1
    - 16 pour la figure D : 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1
- Additionner les périmètres (en allumettes) des figures  $16 + 22 + 16 = 54$

Ou

- Pour les figures B et D, voir, par translation ou rotation, que les côtés à l'intérieur du carré correspondent aux segments des côtés des carrés qui ne sont pas compris dans le dessin et que donc ils mesurent 16.  
Pour la figure C, comprendre que le côté horizontal, à l'intérieur du carré, de la figure correspond au segment du côté horizontal en haut qui n'est pas compris dans la figure et qu'il y a, en outre, encore deux segments à considérer, internes à la figure, chacun de longueur 3. En déduire le périmètre de la figure ( $16 + 6 = 22$ ).  
Additionner les périmètres (en allumettes) des figures  $16 + 22 + 16 = 54$

Ou

- Mesurer à la règle graduée le côté ou le périmètre de la figure A (puis des autres figures) et utiliser la proportionnalité entre mesures en cm et nombres d'allumettes pour en déduire la réponse pour les autres figures. (Cette procédure plus complexe est sujette aux imprécisions des figures et des mesures).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (54 allumettes ou 54) avec explication claire et complète (calculs, déductions, dessins avec les indications du nombre d'allumettes sur chaque segment des périmètres...).
- 3 Réponse correcte avec explication peu claire, mais où la démarche apparaît (report de longueurs, mesures à la règle, comparaison de segments).
- 2 Réponse fausse mais avec stratégie correcte et erreur de calcul, ou erreur de comptage des allumettes ou de mesure.  
Ou réponse correcte mais sans explications.  
Ou deux des périmètres trouvés avec explications claires
- 1 Début de démarche correcte (compréhension que chaque côté mesure 4 allumettes, mesure des périmètres d'au moins deux figures, etc), sans explication.  
Ou un périmètre trouvé avec explications.  
Ou utilisation d'autres unités de mesure (cm ou mm) qui permet de déterminer qu'il y a deux figures de même périmètre, que le carré, une autre de périmètre plus grand, mais sans référence aux allumettes dont on a besoin.  
Ou recherche correcte du périmètre (en allumettes) des parties blanches au lieu des parties grisées.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 5, 6

**Origine :** Bourg-en-Bresse

**9. HUIT TRIANGLES DANS UN CARRE (Cat. 5, 6)**

La figure 1 représente un carré partagé en huit triangles égaux.

La figure 2 est différente de la figure 1. Elle représente le même carré mais partagé d'une autre manière en huit triangles égaux.

La figure 3 est la même que la figure 2 car elle représente le même partage du carré que la figure 2. Il est possible de superposer exactement les deux figures.

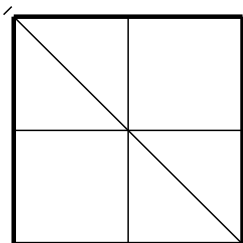


figure 1

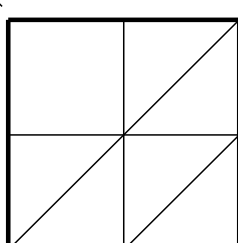


figure 2

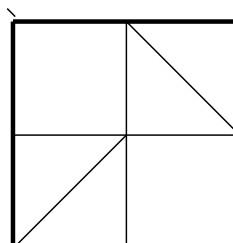


figure 3

**Combien y a-t-il de figures différentes (c'est-à-dire qu'on ne peut pas superposer exactement) qui représentent le partage du carré en huit triangles égaux.**

**Dessinez-les ci-dessous.**

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

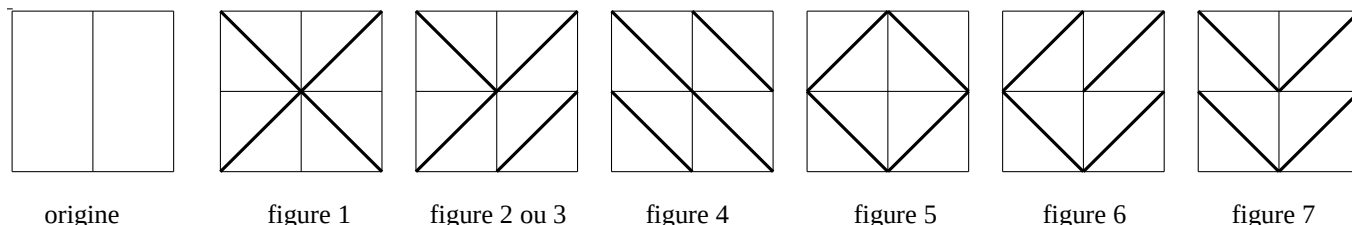
Trouver toutes les partages d'un même carré en 8 triangles rectangles isocèles égaux.

**Analyse de la tâche**

- Vérifier que les figures 2 et 3 représentent un même partage du carré (on peut passer de l'une à l'autre par une rotation d'un quart de tour et une translation) et que les figures 1 et 2 sont évidemment différentes (les deux diagonales du carré sont tracées sur la figure 1, une diagonale et seulement la « moitié » de la seconde sont tracées sur la figure 2).
- Procéder à de premiers essais en effectuant des dessins sur papier quadrillé, éventuellement des découpages et assemblages de petits triangles, trouver de premières figures et vérifier qu'elles sont différentes.
- Pour un inventaire systématique on peut remarquer que les triangles doivent avoir leurs côtés de l'angle droit sur les côtés ou médianes du carré.

Il ne reste plus alors qu'à partir de la figure origine et trouver les quatre figures nouvelles 4, 5, 6, 7.

On peut aussi remarquer que les hypoténuses des triangles sont des diagonales des 4 petits carrés. On peut alors chercher toutes les figures différentes obtenues en traçant une diagonale dans chaque petit carré. Pour cela, on peut envisager les cas où les 4 diagonales ont toute pour extrémité le centre du grand carré, seulement trois d'entre elles, deux d'entre elles, une seule, aucune.

**Attribution des points**

- 4 Quatre nouvelles figures correctes (4, 5, 6, 7) (dessin ou collage)  
ou les six figures
- 3 Trois nouvelles figures correctes (parmi 4, 5, 6, 7) : un seul oubli, sans doublon  
ou cinq des six figures : un seul oubli, sans doublon
- 2 Deux nouvelles figures correctes (parmi 4, 5, 6, 7) : deux oublis, sans doublon  
ou trois figures nouvelles dont un doublon
- 1 Deux figures nouvelles dont un doublon  
Une seule figure nouvelle correcte
- 0 Incompréhension du problème (aucune figure correcte)

**Niveaux :** 5, 6

**Origine :** Rozzano et fj

## 10. LES CHOCOLATS DE ZOÉ (Cat. 5, 6, 7)

Zoé a trente chocolats, elle désire les mettre tous dans des sachets, de telle sorte que chaque sachet contienne le même nombre de chocolats.

Elle commence par faire 5 sachets qui contiennent 6 chocolats chacun puis elle se dit :

*Je pourrais aussi faire 6 sachets de 5 chocolats ou 2 sachets de 15 chocolats ou 15 sachets de 2 chocolats ou 3 sachets de 10 chocolats ou 10 sachets de 3 chocolats ou un seul sachet de 30 chocolats ou encore 30 sachets avec un seul chocolat.*

J'ai donc huit manières différentes de faire des sachets.

Elle mange un chocolat, il en reste 29 : « Zut, se dit-elle, je n'ai plus que deux manières de faire des sachets : 1 sachet de 29 chocolats ou 29 sachets avec un seul chocolat ».

Elle en mange encore un, puis encore un... Elle décide de s'arrêter quand, avec les chocolats qui lui restent, elle peut faire des sachets de 5 manières différentes et seulement 5 manières.

**Combien de chocolats aura-t-elle mangés ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver le plus grand nombre inférieur à 30 qui peut être décomposé exactement de cinq manières différentes en produits de deux nombres, et calculer le complément de ce nombre à 30.

#### Analyse de la tâche

- Vérifier éventuellement qu'il y a 8 répartitions possibles pour 30 chocolats, puis 2 répartitions pour 29, puis comprendre qu'il faut continuer à chercher combien il y a de répartitions pour 28 chocolats, puis pour 27, ... jusqu'à ce qu'on trouve un nombre de chocolats permettant exactement 5 répartitions.
- Comprendre donc que, chaque fois que Zoé mange un chocolat, il faudra recommencer - avec ceux qui restent - la recherche d'une répartition en sachets qui contiennent le même nombre de chocolats.
- Trouver que, avec 28 chocolats il y a les six répartitions ( $1 \times 28$ ,  $2 \times 14$ ,  $4 \times 7$ ,  $7 \times 4$ ,  $14 \times 2$ ,  $28 \times 1$ )
- Continuer de la même manière avec 27 (4 répartitions :  $1 \times 27$ ,  $3 \times 9$ ,  $9 \times 3$ ,  $27 \times 1$ ) ; 26 (4 répartitions :  $1 \times 26$ ,  $2 \times 13$ ,  $13 \times 2$ ,  $26 \times 1$ ) ; 25 (3 répartitions :  $1 \times 25$ ,  $5 \times 5$ ,  $25 \times 1$ ) ; 24 (8 répartitions :  $1 \times 24$ ,  $2 \times 12$ ,  $3 \times 8$ ,  $4 \times 6$ , ...) ; 23 (2 répartitions :  $1 \times 23$ , ...) ; 22 (4 répartitions :  $1 \times 22$ ,  $2 \times 11$ , ...) ; 21 (4 répartitions :  $1 \times 21$ ,  $3 \times 7$ , ...) ; 20 (6 répartitions :  $1 \times 20$ ,  $2 \times 10$ ,  $4 \times 5$  ...) ; 19 (2 répartitions :  $1 \times 19$ , ...) ; 18 (6 répartitions :  $1 \times 18$ ,  $2 \times 9$ ,  $3 \times 6$  ...) ; 17 (2 répartitions :  $1 \times 17$ , ...) ; 16 (5 répartitions :  $1 \times 16$ ,  $2 \times 8$ ,  $4 \times 4$  ;  $8 \times 2$ ,  $16 \times 1$ ).
- Constater que 16 est le plus grand nombre inférieur à 30 qui peut être décomposé exactement de cinq manières différentes.
- Calculer enfin que Zoé a mangé 14 chocolats :  $30 - 16 = 14$ .

Où : faire des essais qui ne sont pas systématiques et qui portent sur des nombres qu'on estime a priori pouvoir satisfaire la condition.

Remarque : Dans une procédure comme dans l'autre, les élèves peuvent après plusieurs essais, constater que tout nombre est décomposable en deux produits où les facteurs sont 1 et le nombre lui-même, et donc restreindre leur recherche à des nombres qui peuvent se décomposer en 3 produits autres que ces deux.

Ou

- Toujours après plusieurs essais, les élèves peuvent constater qu'à chaque fois qu'ils décomposent le nombre en un produit de deux facteurs différents, il y a un deuxième produit avec les mêmes facteurs et donc déduire que pour que le nombre de produits soit impair, il faut que le nombre soit décomposable en un produit d'un nombre par lui-même (autrement dit que le nombre doit être un carré).

Remarque : Une procédure s'appuyant sur la connaissance d'une technique donnant le nombre de diviseurs d'un entier  $n$ , pour  $n$  inférieur à 30, n'est pas envisageable pour les catégories concernées.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (14 chocolats), avec explications claires et complètes (détermination du nombre de répartitions au moins pour les entiers de 26 à 16 et calcul du nombre de chocolats mangés ou écriture qu'ils ont cherché à décomposer



tous les nombres en allant du plus grand au plus petit et qu'ils se sont arrêtés quand ils ont trouvé un nombre solution ou explication des propriétés du nombre cherché qui réduit les nombres testés)

- 3 Réponse 14, avec explications peu claires ou incomplètes (par exemple uniquement la détermination des répartitions pour 16 chocolats).

Ou réponse 16 (nombre de chocolats à répartir), avec démarche correcte et explicite, mais oubli du calcul de chocolats mangés.

- 2 Réponse 14 sans explication.

ou réponse 16 chocolats (avec seulement la vérification que le nombre 16 convient).

- 1 Début de recherche correct : au moins 3 nombres autres que 30 et 29 pour lesquels toutes les décompositions en produits de 2 facteurs ont été trouvées.

- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 5, 6, 7

**Origine :** Bourg-en-Bresse

**11. DATES PARTICULIERES (Cat. 6, 7)**

Eugénie voyage sur l'autoroute avec ses parents, elle remarque sur un panneau la date 14/02/2016.

Elle réfléchit un peu et dit : « *C'est curieux, la somme de 14 et 2, ça fait justement 16 !* ».

Sa maman lui répond : « *C'est pareil pour la date de naissance de ta grand-mère le 27/11/1938, c'est la même coïncidence:  $27 + 11 = 38$ . Ce sont vraiment "des dates particulières" !* ».

Durant l'année 1938, en plus de la date de naissance de la grand-mère d'Eugénie, il y a eu d'autres "dates particulières".

**Énumérez toutes les dates particulières de l'année 1938 autres que la date de naissance de la grand-mère d'Eugénie.**

**Montrez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Décomposer un nombre en une somme de deux nombres, chacun appartenant à un intervalle contraint.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre les contraintes à respecter: on ajoute les nombres désignant respectivement le jour à l'intérieur d'un mois et le mois à l'intérieur d'une année, cette somme devant être égale au nombre formé par les deux derniers chiffres de l'année.
- Remarquer que le premier des deux termes de la somme doit être inférieur ou égal à 31 (ou à 30, ou à 28, selon les mois), et que le second terme doit être inférieur ou égal à 12.
- Procéder à une recherche ordonnée de toutes les "dates particulières" vérifiant les mêmes conditions en 1938. Par exemple, partir du nombre maximum de mois possible, 12 pour décembre, et continuer en rétrogradant. En déduire les dates particulières de 1938 :

26/12/1938    27/11/1938    28/10/1938    29/09/1938    30/08/1938    31/07/1938

**Attribution des points**

- 4 Énumération correcte et complète (26/12/1938; 28/10/1938; 29/09/1938; 30/08/1938; 31/07/1938) avec des explications claires (avec éventuelle répétition de la date 27/11/1938)
- 3 Énumération correcte et complète mais avec explications peu claires ou incomplètes  
Ou omission d'une date particulière de 1938 mais avec explications claires
- 2 Omission de 2 ou 3 dates particulières de 1938 avec explications claires  
Ou énumération correcte et complète sans explications
- 1 Seulement une ou deux dates particulières, avec ou sans explications
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux:** 6, 7

**Origine:** Sienne

## 12. COLLECTION DE CARTES POSTALES (Cat. 6, 7, 8)

Rita et Roberta font la collection de cartes postales. Rita en a 200 et demande à Roberta combien elle en a.

Roberta lui répond :

- J'en ai moins de 200,
- Si je les regroupe deux par deux, ou trois par trois, ou sept par sept, il en reste toujours une toute seule,
- Si je les regroupe cinq par cinq, il n'en reste aucune.

**Quel est le nombre de cartes postales dans la collection de Roberta?**

**Expliquez comment vous avez trouvé la solution.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Chercher tous les nombres inférieurs à 200 divisibles par 5, et dont le reste de la division par 2, 3 et 7 soit égal à 1.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre cherché est inférieur à 200
- Comprendre à partir de la dernière phrase que ce nombre est multiple de 5 : lister ces multiples jusqu'à 195. Éliminer le 5 celui-ci ne pouvant former un groupe de sept; éliminer tous les multiples de deux (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190); éliminer tous les multiples de 3 (15, 45, 75, 105, 135, 165, 195); éliminer tous les multiples de 7 (35, 175).

Restent les nombres: 25 – 55 – 65 – 85 – 95 – 115 – 125 – 145 – 155 – 185.

Parmi ceux-ci, l'unique respectant toutes les conditions est 85. (Cette procédure pouvant être effectuée également en partant de 200.)

Ou

- D'après la deuxième condition, déterminer le plus petit commun multiple de 2, 3, 7 égal à 42, puis ajouter 1:  $42 + 1 = 43$  ;  $(42 \times 2) + 1 = 85$  ;  $(42 \times 3) + 1 = 127$  ;  $(42 \times 4) + 1 = 169$
- Vérifier que seul 85 respecte la condition suivante.

Ou

- Confronter les multiples communs de 2, 3, 7: (42, 84, 126, 168) avec les multiples de 5 immédiatement successifs (45, 85, 130, 170).

Vérifier que seul 85 respecte la deuxième condition

Ou :

- Comprendre que le nombre est un multiple de 5 se terminant par 5, car il n'est pas un multiple de 2.
- Comprendre qu'il faut trouver un multiple de 7, de 3 et de 2, ayant 4 pour chiffre des unités et auquel il faudra ajouter 1.
- Trouver que seul 84 répond à ces exigences et conclure que Roberta possède donc 85 cartes postales.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (85) avec les détails de la procédure (par exemple: liste des multiples de 2 augmentés de 1 (et/ou de 3 augmentés de 1, et/ou de 7 augmentés de 1) ou encore de 42 augmentés de 1... avec des indications spécifiant que 85 est le seul qui corresponde ou lister les multiples de 5 en expliquant pourquoi 85 convient.
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires (par exemple liste très incomplète).
- 2 Réponse correcte sans explications  
Ou liste correcte, mais réponse erronée sur le choix des nombres.
- 1 Début de raisonnement correct avec liste incomplète des multiples  
Ou réponse « 85 et ... » avec un nombre erroné.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux:** 6, 7, 8

**Origine:** Pouilles

### 13. PYRAMIDES BICOLORES (Cat. 6, 7, 8, 9)

Alexandre possède un grand nombre de petits cubes blancs et un grand nombre de cubes gris. Il les utilise pour construire des tours en forme de pyramide, comme celles que vous voyez sur ces deux dessins.

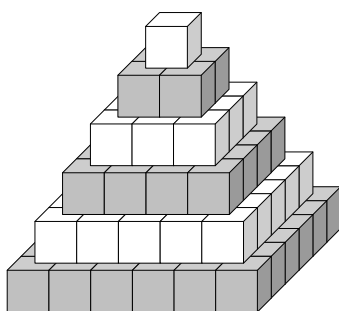


Figure 1

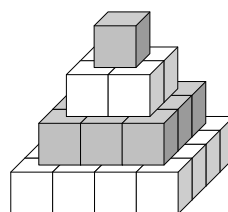


Figure 2

Les règles de construction qu'il utilise sont les suivantes :

- Chaque étage est carré et il est formé de cubes de la même couleur ;
- Deux étages qui se touchent sont de couleur différente ;
- L'étage du début et celui de la fin sont de couleur différente ;
- La tour est terminée par un seul cube.

Aujourd'hui Alexandre a construit une belle tour et a utilisé 165 cubes gris.

**Combien de cubes blancs a-t-il utilisés ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Dans un contexte de constructions pyramidales utilisant des cubes, additionner les carrés des premiers nombres impairs et des premiers nombres pairs, sachant qu'une des deux sommes est égale à 165.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre le mode de constructions des tours, à partir des exemples donnés et des règles décrites.
- Comprendre que les nombres de cubes utilisés pour les différents étages constituent la suite des carrés des nombres naturels 1, 4, 9, 16, ...
- Si le cube du dessus est gris, on doit faire les sommes successives des carrés des deux premiers, puis des trois premiers, puis des quatre premiers nombres impairs.... jusqu'à obtenir 165 :  $1+9$ ;  $1+9+25$ ;  $1+9+...=165$  ; se rendre compte que le dernier carré à ajouter est 81 qui correspond au 9<sup>ème</sup> étage de la tour en partant du haut vers le bas.
- Si le premier cube était blanc, il faudrait additionner les 2<sup>ème</sup>, 4<sup>ème</sup>, 6<sup>ème</sup>,... termes de la suite qui sont tous pairs, et donc leur somme ne peut pas être 165.
- Comme la tour a neuf étages gris, et qu'elle commence par un étage gris, on aura au total 10 étages, puisque le premier et le dernier doivent être de couleurs différentes.
- Additionner ensuite les carrés des nombres pairs de 2 à 10 :  $4+16$ ;  $4+16+36$ ;  $4+16+...=220$ . Conclure qu'il y a 220 cubes blancs dans la pyramide.

Ou : comprendre tout de suite que le cube du dessus doit être gris étant donné que 165 est un nombre impair et ne peut pas être obtenu par la somme des carrés des nombres pairs.

Procéder donc en additionnant les carrés des nombres impairs pour déterminer la hauteur de la pyramide.

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (220 cubes blancs) bien expliquée (dessins, calculs,...) avec explication du rejet de l'autre type de tours avec un cube blanc au sommet
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes ou peu claires.

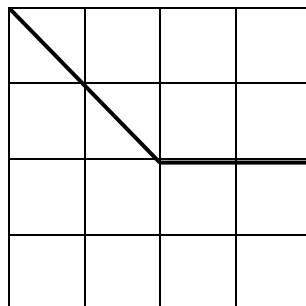
- 2 Procédure correcte mais réponse erronée, due à une seule erreur dans le comptage ou dans le calcul.  
Ou procédure correcte mais réponse “120 cubes blancs” parce qu’on oublie que l’étage de base et celui du haut doivent être de couleurs différentes et qu’on s’arrête donc au neuvième étage de la pyramide.
- 1 Début de raisonnement correct, par exemple avec calcul au moins des cinq ou six premiers étages.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux:** 6, 7, 8, 9

**Origine:** Sienne

## 14. LE CARRE CHANGE DE FORME (II) (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Dans le carré dessiné sur papier quadrillé, on a obtenu deux pièces en découpant le long des segments indiqués.



Si on déplace les deux pièces ou qu'on en retourne une et qu'ensuite on les assemble de façon à ce qu'un côté d'une pièce coïncide exactement avec un côté de l'autre, on obtient une autre figure.

**Dessinez sur une feuille de papier quadrillé toutes les figures différentes, autres que le carré, qu'il est possible d'obtenir avec les deux pièces du carré en respectant la règle d'assemblage**

**Attention : deux figures sont différentes si elles ne sont pas exactement superposables.**

---

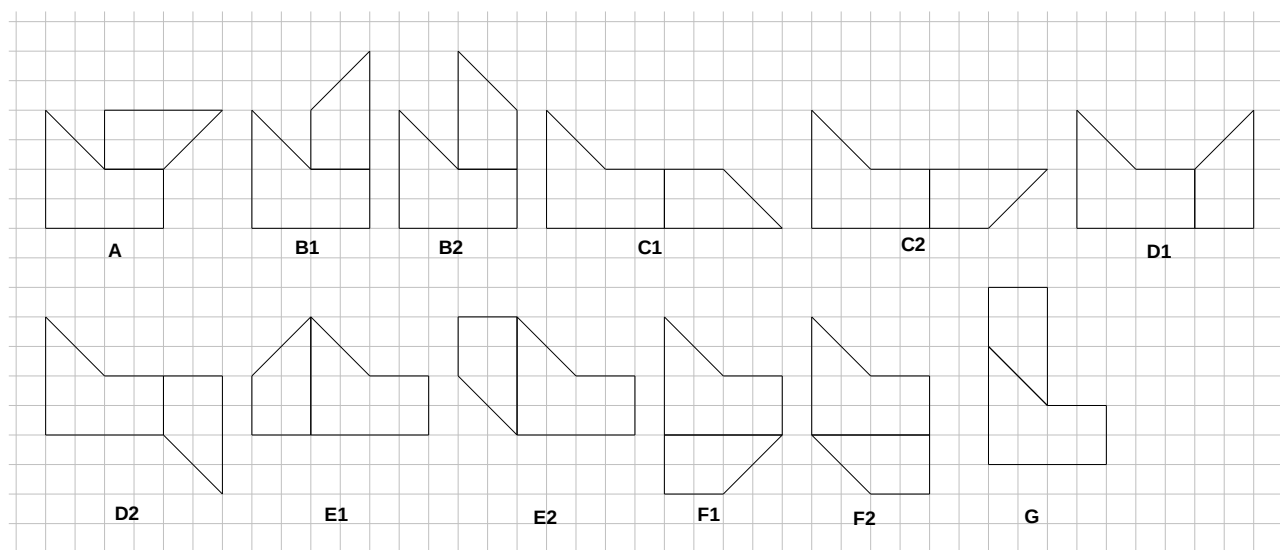
### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver tous les polygones qui peuvent être formés en combinant des côtés de même longueur de deux polygones obtenus en partageant un carré en deux parties.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que les figures recherchées sont toutes réalisées à partir des deux mêmes pièces du carré assemblées de différentes façons (il est permis de retourner l'une ou l'autre des pièces) en ayant un côté commun
- Analyser les deux pièces, trapèze rectangle et pentagone, qui composent le carré et repérer les côtés d'une même pièce qui ont même longueur et les côtés des deux pièces qui ont même longueur. En particulier, se rendre compte qu'ont même longueur : la grande base du trapèze et deux côtés du pentagone, la petite base et la hauteur du trapèze et deux côtés du pentagone, le côté "oblique" du trapèze et le côté "oblique" du pentagone
- Imaginer assembler les deux pièces du carré en respectant les règles indiquées et essayer de dessiner les figures obtenues sur une feuille quadrillée. L'identification des figures peut être facilitée en découpant un exemplaire du trapèze et du pentagone et en cherchant à les assembler de façon à ce qu'ils aient exactement un côté commun.
- Procéder de façon non organisée (dans ce cas, il est probable que toutes les figures ne soient pas trouvées) ou de façon organisée. Dans ce second cas, considérer par exemple la pièce en forme de pentagone, choisir un de ses côtés et rechercher le ou les côtés du trapèze rectangle qui ont même longueur. Pour chaque côté trouvé, assembler les deux pièces. Se rendre compte qu'en assemblant le pentagone avec le trapèze rectangle par les mêmes côtés après avoir retourné le trapèze rectangle, il est possible parfois d'obtenir une autre figure qui n'est pas superposable à la première (cf. les figures  $B_1$  et  $B_2$ ;  $C_1$  et  $C_2$ ;  $D_1$  et  $D_2$ ;  $E_1$  et  $E_2$ ;  $F_1$  et  $F_2$ ), tandis que dans d'autres cas, il est impossible de construire une autre figure (cf. les figures A, G)
- Une tâche assez délicate est de contrôler que les figures obtenues ne sont pas superposables les unes aux autres. Une méthode efficace pour le vérifier expérimentalement consiste par exemple à reproduire une des deux figures à comparer sur une feuille de papier assez mince pour voir par transparence et à s'assurer que la reproduction de la figure, éventuellement après retournement de la feuille, n'est pas superposable à l'autre figure. (Il est possible de constater de cette façon que deux figures superposables s'obtiennent l'une à partir de l'autre en retournant les deux pièces qui les composent)
- Conclure que les figures recherchées (distinctes du carré et non isométriques entre elles) sont les 12 figures reproduites ci-dessous



### Attribution des points

- 4 Dessins des seules 12 figures correctes, sans doublon ni erreur (éventuellement avec en plus le carré initial)
- 3 Dessins de 9 à 11 figures correctes sans doublon et sans erreur (éventuellement avec en plus le carré initial)  
Ou dessins des 12 figures correctes avec ajout d'au plus deux figures superposables et sans aucune erreur (éventuellement avec en plus le carré initial)
- 2 Dessins de 9 à 11 figures correctes avec ajout d'au plus deux figures superposables et sans aucune erreur (éventuellement avec en plus le carré initial)  
Ou dessins des 12 figures correctes avec ajout d'au plus deux figures superposables et/ou avec au plus une erreur (éventuellement avec en plus le carré initial)  
Ou dessins de 6 à 8 figures correctes, sans doublon ni erreur (éventuellement avec en plus le carré initial)
- 1 Dessins de 4 à 5 figures correctes sans doublon ni erreur (éventuellement avec en plus le carré initial)  
OU dessins de 6 à 11 figures correctes avec ajout d'au plus deux figures superposables et/ou avec au plus deux erreurs (éventuellement avec en plus le carré initial)
- 0 Incompréhension du problème ou tout autre réponse non recensée précédemment

**Niveaux :** 6 , 7 , 8 , 9 , 10

**Origine:** Sienne

## 15 CARRES MAGIQUES MULTIPLICATIFS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Un carré magique multiplicatif est un carré dans lequel les produits des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égaux.

Les nombres placés dans les cases d'un carré magique doivent être tous différents.

Rosanna veut réaliser un carré magique multiplicatif en utilisant les puissances de 2 avec les exposants de 0 à 8. Elle commence par placer 2 exposant 4 dans la case centrale.

|  |       |  |
|--|-------|--|
|  |       |  |
|  | $2^4$ |  |
|  |       |  |

Elle continue en plaçant dans une même diagonale le double et la moitié du nombre qu'elle a placé dans la case centrale.

**Aidez Rosanna à compléter de toutes les façons possibles son carré multiplicatif avec les puissances de 2 d'exposants 0 à 8 non encore utilisées.**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Construire des carrés magiques multiplicatifs dans lesquels la case centrale est déjà remplie, en utilisant des puissances de 2 et leurs propriétés, en respectant des contraintes sur les exposants et sur les puissances à placer sur une deux diagonales.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que le double de  $2^4$  est  $2^5$  et que sa moitié est  $2^3$  et les placer sur une diagonale
- Calculer le produit des puissances placées sur la diagonale en effectuant la somme des exposants ( $2^{12}$ ).
- Comprendre que la somme des exposants des puissances qui sont dans chaque ligne et dans chaque colonne doit être égale à 12. Compléter les lignes et les colonnes d'un carré magique en tenant compte par exemple des différentes façons d'obtenir 9 ( $12 - 3$ ) si on complète une ligne ou une colonne qui contient déjà la puissance troisième de 2, ou d'obtenir 7 ( $12 - 5$ ) si on complète une ligne ou une colonne qui contient déjà la puissance cinquième de 2, ou 8 ( $12 - 4$ ) si on complète une ligne ou une colonne qui contient déjà la puissance quatrième de 2.

Ou

Calculer  $2^4 = 16$ , puis le double et la moitié, trouver le produit constant. Calculer toutes les autres puissances de 2 ayant un exposant compris entre 0 et 8 et compléter un carré en faisant des essais avec ces nombres, puis remplacer les nombres par leur écriture sous forme de puissances de 2.

Par symétrie et rotation du carré trouvé, en déduire les autres et déterminer qu'ils sont au nombre de 8.

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^3$ | $2^8$ | $2^1$ |
| $2^2$ | $2^4$ | $2^6$ |
| $2^7$ | $2^0$ | $2^5$ |

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^5$ | $2^6$ | $2^1$ |
| $2^0$ | $2^4$ | $2^8$ |
| $2^7$ | $2^2$ | $2^3$ |

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^1$ | $2^8$ | $2^3$ |
| $2^6$ | $2^4$ | $2^2$ |
| $2^5$ | $2^0$ | $2^7$ |

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^1$ | $2^6$ | $2^5$ |
| $2^8$ | $2^4$ | $2^0$ |
| $2^3$ | $2^2$ | $2^7$ |

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^3$ | $2^2$ | $2^7$ |
| $2^8$ | $2^4$ | $2^0$ |
| $2^1$ | $2^6$ | $2^5$ |

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^7$ | $2^2$ | $2^3$ |
| $2^0$ | $2^4$ | $2^8$ |
| $2^5$ | $2^6$ | $2^1$ |

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^5$ | $2^0$ | $2^7$ |
| $2^6$ | $2^4$ | $2^2$ |
| $2^1$ | $2^8$ | $2^3$ |

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^7$ | $2^0$ | $2^5$ |
| $2^2$ | $2^4$ | $2^6$ |
| $2^3$ | $2^8$ | $2^1$ |



Ou

Construire tous les carrés magiques additifs  $3 \times 3$  avec les nombres de 0 à 8 et avec 4 dans la case centrale. Ensuite, transformer les carrés trouvés en carrés multiplicatifs en écrivant dans chaque case la puissance de 2 ayant pour exposant le nombre qui s'y trouve.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (les 8 carrés), sans doublon, ni erreur, avec mention de la propriété utilisée des puissances et vérification pour au moins un carré que les produits sont les mêmes dans chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale
- 3 Réponse correcte (les 8 carrés), sans doublon, ni erreur, sans vérification ni explication  
Ou 6 ou 7 carrés corrects avec vérifications pour quelques lignes, colonnes ou diagonales
- 2 4 ou 5 complets et corrects, sans doublon, ni erreur, avec ou sans explications  
Ou au moins 6 carrés corrects avec la présence d'au maximum 4 doublons, sans erreur
- 1 Moins de 4 carrés corrects.  
Ou au moins 4 carrés corrects avec au maximum deux autres carrés incorrects et/ou au plus deux doublons
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 7, 8, 9, 10

**Origine:** Aoste

## 16. ETRANGES TRIANGLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le professeur de mathématiques a demandé à ses élèves, en devoir à la maison, de trouver tous les triangles qui vérifient les trois conditions suivantes :

- leur périmètre mesure 36 cm ;
- les mesures des côtés, exprimées en centimètres, sont des nombres entiers ;
- la différence de longueur entre leurs deux côtés les plus longs est égale à 6 cm.

Le lendemain, certains étudiants disent qu'ils ont trouvé cinq triangles, d'autres trois et d'autres seulement deux.

**Quelle est la bonne réponse?**

**Justifiez votre réponse, en indiquant les longueurs des côtés des triangles trouvés.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer les longueurs possibles, exprimées en nombres entiers, des côtés de triangles dont sont donnés le périmètre et la différence de longueur entre les deux côtés les plus longs.

#### Analyse de la tâche

- Imaginer la taille de certains triangles répondant aux trois conditions. Se rendre compte que, du point de vue numérique, il faut trouver trois nombres dont la somme est 36 et pour lesquels la différence entre les deux plus grands est égale à 6.
- Au vu de la taille des nombres, considérer qu'il n'y a pas beaucoup de solutions et, par conséquent, qu'il est possible de faire un inventaire des triplets de nombres possibles du point de vue mathématique, ce qui aboutit à cinq triplets de nombres qui vérifient les trois conditions :  
(20, 14, 2), (19, 13, 4), (18, 12, 6), (17, 11, 8), (16, 10, 10).
- Se placer ensuite dans le contexte géométrique pour chercher parmi ces triplets lesquels correspondent à des triangles constructibles. Pour cela, il est possible :
  - d'essayer de construire les triangles et de voir qu'il y a deux triplets qui sont bons : (17, 11, 8) et (16, 10, 10) et un doute sur le triplet (18, 12, 6) ; le triangle correspondant à ce triplet paraît constructible à la règle et au compas, mais il est "presque à plat". Pour surmonter le doute, remarquer que la longueur du côté le plus long (18 cm) est égale à la somme des longueurs des deux autres côtés et dépasser l'illusion visuelle de la construction (en raison de l'épaisseur des lignes ou à la précision des mesures) pour en déduire que les trois sommets sont alignés. Il est également possible de se référer à un théorème connu relatif à l'inégalité triangulaire.
  - Ou, sans construire les triangles effectivement, utiliser le théorème relatif à l'inégalité triangulaire pour conclure.

#### Attribution des points

- 4 Bonne réponse (« deux triangles »), avec mention des deux triplets (17, 11, 8) et (16, 10, 10), ou des dessins illustrant les mesures des côtés, et une justification pour l'exclusion des trois autres triplets (inégalité triangulaire ou même «vous ne pouvez pas construire le triangle », éventuellement en citant le "triangle aplati")
- 3 Bonne réponse avec mention des deux triplets ou des dessins de triangles sans aucun commentaire sur le fait qu'il n'y a pas d'autres solutions
- 2 Bonne réponse sans mention des triplets et sans dessin des triangles  
Ou réponse "un triangle" avec dessin du triangle ou mention des longueurs de ses côtés, sans trainage incorrect  
Ou réponse "trois triangles" ou «la bonne réponse est de trois," avec les dimensions ou les dessins des trois solutions, avec les deux triangles corrects et le triangle "aplati" de côtés (18, 12, 6)
- 1 réponse «cinq triangles», avec la liste des cinq triples : (20, 14, 2), (19, 13, 4), (18, 12, 6), (17, 11, 8), (16, 10, 10)  
Ou erreur de calcul de niveau pour certains triplets aboutissant à des triangles effectivement constructibles
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 7, 8, 9, 10

**Origine:** Suisse Romande

## 17. SOUPE EN PROMOTION (Cat. 8, 9, 10)

Une entreprise produit une soupe à la tomate qui est conditionnée en boîtes d'un litre.

Les boîtes sont de forme cylindrique de diamètre 8,4 cm.

Au cours d'une campagne de promotion, la société décide d'offrir à ses clients, au même prix, des boîtes de même hauteur, mais qui contiennent 15% de soupe en plus.

**Quel est le diamètre des nouvelles boîtes de soupe ?**

**Effectuez les calculs au millimètre près.**

**Justifiez votre réponse.**



### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Calculer le diamètre d'un cylindre dont le volume est supérieur de 15% à celui d'un autre cylindre de même hauteur et dont le diamètre est connu.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que le volume des boîtes préparées pour la promotion est supérieur de 15% au volume des boîtes habituellement utilisées, à savoir 1,15 litres ou 1 150 cm<sup>3</sup>.
- Déterminer la hauteur des boîtes hors promotion : après avoir converti 1 litre en 1 000 cm<sup>3</sup> : la superficie de base est égale à  $\pi \times (8,4/2)^2 \approx 55,42 \text{ cm}^2$  (pour  $\pi = 3,142$ ),  $\pi \times (8,4/2)^2 \approx 55,39 \text{ cm}^2$  (pour  $\pi = 3,14$ ), donc la hauteur est  $1\,000/55,42 \approx 18,04 \text{ cm}$  ou  $1\,000/55,39 \approx 18,05 \text{ cm}$
- Déterminer l'aire de la base des nouvelles boîtes :  $1\,150/18,04 \approx 1\,150/18,05 \approx 63,7 \text{ cm}^2$ , puis le diamètre :  $2 \times \sqrt{63,7/\pi} \approx 9,0 \text{ cm}$ .

Ou utiliser les proportions pour trouver directement l'aire de base des boîtes en promotion

- Déterminer l'aire de base des boîtes habituellement utilisées :  $\pi \times (8,4/2)^2 \approx 55,42$
- Calculer l'aire de base des boîtes en promotion :  $V : 55,42 = (V \times 1,15) : x$ ;  $x \approx 63,7$  ; puis le diamètre :  $2 \times \sqrt{63,7/\pi} \approx 9,0 \text{ cm}$

Ou utiliser une procédure algébrique :

- Si, respectivement,  $V$  et  $V'$  sont les volumes des boîtes hors promotion et en promotion,  $h$  leur hauteur et  $d$  et  $d'$  leurs diamètres de base, on a :  
 $V = 1 \text{ litre} = 1\,000 \text{ cm}^3$ ,  $d = 8,4 \text{ cm}$ ,  $V' = V(1 + 0,15) = 1\,150 \text{ cm}^3$ .
- Calculer  $V'$  en fonction de  $d'$  :  $V' = h \times \pi \times (d'/2)^2$  et  $h = V/[\pi \times (d/2)^2]$ , d'où on tire :  $V' = V/[\pi \times (d/2)^2] \times \pi \times (d'/2)^2$ ,  
Ce qui donne :  $V' = V \times (d'/d)^2$ .
- Résoudre l'équation d'inconnue  $d'$  pour calculer sa valeur :  
 $d' = d \times \sqrt{V'/V} = d \times \sqrt{1,15} \approx 9 \text{ cm}$ .

#### Attribution des points

- Réponse correcte (9,0 cm ou 9 cm) avec une justification claire et complète
- Réponse correcte avec des justifications peu claires ou incomplètes, par exemple de fausses égalités résultant de calculs enchainés, ou du non-respect de l'approximation  
Ou procédure correcte et bien expliquée, mais donnée de la mesure du rayon seul (4,5)  
Ou procédure correcte et bien expliquée, mais une erreur dans les calculs numériques
- Réponse correcte sans aucune explication  
Ou seulement calcul de la hauteur de la nouvelle boîte,  $h' = 18 \text{ cm}$ , avec des explications ou des calculs corrects
- Début de recherche correcte, par exemple, calcul du volume des nouvelles boîtes,  $V' = 1,15 \text{ litres} = 1\,150 \text{ cm}^3$   
Ou procédure correcte, mais avec une réponse erronée due à une erreur dans la conversion des litres en centimètres cubes

0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 8, 9, 10

**Origine :** Franche-Comté

**18. LE TAPIS ROULANT** (Cat. 8, 9, 10)

A Paris, il y a une station de métro dans laquelle un couloir mesure 250 mètres.

Pour faciliter le passage, on a installé un tapis roulant sur toute sa longueur.

Ce tapis roulant avance à une vitesse de 3 km à l'heure.

Michèle, qui est pressée, prend le tapis roulant en continuant à marcher à sa vitesse habituelle. Elle traverse ainsi le couloir en seulement deux minutes.

**Quelle est la vitesse à laquelle Michèle marche habituellement ?**

**Expliquez comment vous l'avez trouvée.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

- Calculer la vitesse d'une personne marchant sur un tapis roulant en mouvement, sur une distance et en un temps donnés.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que pour traverser le couloir, Michèle doit marcher moins longtemps sur le tapis roulant que si elle était restée immobile, parce que sa vitesse s'ajoute à celle du tapis roulant.
- Calculer le temps nécessaire pour traverser le couloir en restant immobile sur le tapis roulant :  $250 : 3\,000 = 1/12$  d'heure, soit 5 minutes.
- Calculer la vitesse à laquelle Michèle a traversé le couloir :  $250 : (1/30) = 7\,500\text{m/h}$  soit 7,5 km/h et en déduire que sa vitesse habituelle de marche est de 4,5 km/h (7,5 - 3).

Ou, calculer la vitesse à laquelle Michèle a traversé le couloir sur le tapis roulant, en mètres par minute :  $250 / 2 = 125$  mètres par minute, soit 7 500 mètres à l'heure ( $125 \times 60$ ). En déduire que la vitesse à laquelle Michèle marche habituellement est de 4,5 km/h (7,5 - 3).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (4,5 km/h) avec explications claires et complètes.
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes.
- 2 Réponse correcte sans explication ou réponse erronée à cause d'une erreur de calcul mais avec un raisonnement correct.
- 1 Début de recherche correct.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveau :** 8, 9, 10

**Origine :** Franche Comté

## 19. LES CUBES DE L'ANNEE (Cat 9, 10)

Depuis la nuit des temps, la famille Cubik enrichit sa collection de cubes de 1 cm de côté, en ajoutant un cube chaque année, de façon à ce que le total des cubes soit égal au nombre qui représente l'année en cours.

Chaque année, les cubes sont disposés de façon à former un parallélépipède rectangle dans lequel la somme des longueurs de toutes les arêtes est la plus petite possible.

En 2014, la somme des longueurs de toutes les arêtes était de 296 cm.

L'année suivante, la longueur totale de toutes les arêtes de la construction était de 196 cm.

**Quelles sont les dimensions du parallélépipède rectangle que la famille Cubik a construit en 2016, de manière à ce que la somme des longueurs de ses arêtes soit la plus petite possible ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer les dimensions entières d'un parallélépipède rectangle de volume  $2016 \text{ cm}^3$ , dont la somme des longueurs de toutes les arêtes est minimale.

#### Analyse de la tâche

- Vérifier les données pour 2014 pour s'assurer que les conditions sont respectées. Comprendre qu'il faut déterminer les trois dimensions de façon à ce que leur produit soit 2104 (en référence à la formule donnant le volume d'un parallélépipède rectangle) et que leur somme soit égale à  $296 : 4 = 74$ . Décomposer 2014 en produit de facteurs et s'apercevoir que les trois dimensions ne peuvent être que 53, 19, 2 et que leur somme est effectivement 74. Procéder de même pour trouver les dimensions du parallélépipède formé de 2015 cubes et dont la somme des trois dimensions est  $49 : 31, 13, 5$  (leur produit est 2015).
- Comprendre qu'il s'agit de trouver tous les triplets de trois entiers naturels dont le produit est 2016 et de choisir celui dont la somme des termes est minimale.
- Se rendre compte, avant de former les triplets, qu'il faut déterminer tous les diviseurs de 2016 (il y en a 36) ou décomposer 2016 en facteurs premiers :  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ .
- Identifier tous les triplets de diviseurs à partir de (1; 1; 2016), puis (1; 2; 1008), (1; 3; 672), ... (2; 2; 504), (6; 6; 56) ... (6; 7; 48), ... (8; 9; 28), ... (12; 12; 14) et constater que la somme des arêtes diminue quand les différences des dimensions prises deux à deux diminuent.
- Examiner ensuite les triplets de nombres de même ordre de grandeur : sélectionner, par exemple, les triplets dont un des nombres est 14. Constater que la somme des deux autres termes augmente en même temps que leur différence, pour le triplet (12; 12; 14) la somme est  $24 + 14 = 38$  (et donc la somme de toutes les arêtes est  $4 \times 38 = 152$ ) ; pour (9; 14; 16) la somme est  $25 + 14 = 39$  (et  $4 \times 39 = 156$ ), pour (8; 14; 18) la somme est  $26 + 14 = 40$  (et  $4 \times 40 = 160$ ), pour (6; 14; 24) la somme est  $30 + 14 = 44$  (et  $4 \times 44 = 176$ );  
Les mêmes constatations peuvent être faites sur un triplet contenant le nombre 12 : pour (12; 12; 14) la somme totale est  $4 \times 38$  ; pour (8; 12; 21) la somme totale est  $4 \times 41$  ; pour (6; 12; 28) la somme totale est  $4 \times 46$  ; ...
- En déduire que les dimensions du parallélépipède 2016 sont, en cm, 12, 12 et 14.

Ou

- Constater que pour avoir la somme minimale, il faut éviter que figurent de très grands nombres dans le triplet (et par conséquent également de très petits nombres), et donc qu'il faut écarter 2016, 1008, 504, 252, ....
- Analyser les triplets dont les nombres sont proches les uns des autres. Comme le cube d'un nombre le plus proche de 2016 est  $13^3 = 2197$  et que 13 n'est pas un diviseur de 2016, il faut choisir le triplet dans lequel les termes sont voisins de 13, donc (12, 12, 14) dont la somme est 38

#### Attribution des points

- 4 Réponse complète et correcte (12, 12, et 14 cm) avec des explications sur la variation de la somme des arêtes correspondant à un même volume et une vérification sur les triplets de nombres « proches » ou raisonnement à partir de la racine cubique de 2016.
- 3 Réponse complète et correcte avec uniquement vérification sur les triplets de nombres "proches".

- 
- 2 Réponse complète et correcte sans explication ;  
Ou un triplet de nombres “proches” pour lequel la somme des arêtes est comprise entre  $4 \times 39$  et  $4 \times 44$ , avec explications.
- 1 Un triplet de nombres “proches”, comme ci-dessus, sans explication ;  
Ou début de raisonnement dans lequel apparaissent au moins tous les diviseurs de 2016 ;  
Ou seulement vérification des conditions sur les années 2014 et 2015.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveau :** 9, 10

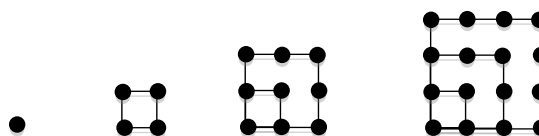
**Origine :** fj, 2016

## 20. NOMBRES POLYGONAUX (Cat 10)

Les nombres carrés sont appelés ainsi parce qu'ils peuvent être représentés au moyen de points disposés à équidistance sur les côtés de carrés superposés

Voici les quatre premiers nombres carrés :

1, 4, 9 et 16, de rangs respectifs 1, 2, 3 et 4.

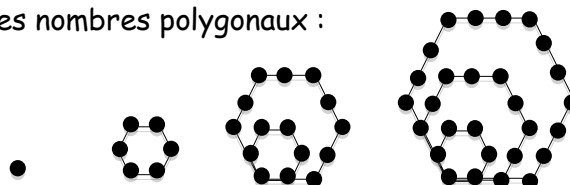


Ceux de rang 5 et 6 sont les nombres 25 et 36, et ainsi de suite.

De la même manière on peut représenter d'autres nombres polygonaux : triangulaires, pentagonaux et aussi hexagonaux.

Voilà les quatre premiers nombres hexagonaux :

1, 6, 15, 28, de rang respectif 1, 2, 3 et 4.



**Quel est le nombre carré le plus proche de 1 000 ?**

**Quel est le nombre hexagonal le plus proche de 1 000 ?**

**Indiquez aussi le rang de chacun d'eux.**

**Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer le nombre carré et le nombre hexagonal le plus proche de 2016.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre le mode de représentation et de détermination des nombres polygonaux.
- Pour les numéros carrés, on remarque immédiatement que ce sont des carrés parfaits. 1 000 est situé entre  $31^2 (= 961)$  et  $32^2 (= 1024)$ , le carré recherché a donc pour rang 32.
- Pour les nombres polygonaux, il est possible, en observant leurs représentations, à partir du premier, de déterminer les suivants en identifiant à chaque fois le nombre de points à ajouter (on peut remarquer que ce nombre est égal à  $4n-3$ ,  $n$  étant le rang de l'hexagone).

|              |   |   |          |             |                |                   |
|--------------|---|---|----------|-------------|----------------|-------------------|
| rang :       | 1 | 2 | 3        | 4           | 5              | 6                 |
| nb hexagonal | 1 | 6 | 15 = 6+9 | 28 = 6+9+13 | 45 = 6+9+13+17 | 66 = 6+9+13+17+21 |

- Pour arriver à 1 000, une telle procédure est longue et sujette à des erreurs de calculs. Il est préférable de trouver une manière de déterminer le terme générique (de rang  $n$ ) au moyen du calcul de la somme des premiers  $n$  termes d'une progression arithmétique à partir de 1, de raison 4. Cette somme peut s'exprimer par  $n(2n-1)$ . Il faut alors déterminer la valeur de  $n$  tel que  $n(2n-1)$  soit la plus proche possible de 1000, soit par essais soit en résolvant l'équation du second degré  $2n^2 - n = 1000$ .

La solution positive de l'équation est environ 22,6, donc le rang du nombre hexagonal voisin de 1000 est 23 et le nombre hexagonal cherché est  $23 \times 45 = 1035$ .

- Si on ne connaît pas la formule pour les nombres hexagonaux, on peut considérer autrement la suite des termes et chercher à les écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs :

|         |                |                |                 |                 |                 |                  |                  |                   |                   |
|---------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| rang    | 1              | 2              | 3               | 4               | 5               | 6                | 7                | 8                 | 9                 |
| nb hexa | $1=1 \times 1$ | $6=2 \times 3$ | $15=3 \times 5$ | $28=4 \times 7$ | $45=5 \times 9$ | $66=6 \times 11$ | $91=7 \times 13$ | $120=8 \times 15$ | $163=9 \times 17$ |

On peut remarquer que chaque nombre apparaît comme le produit du rang du terme par un facteur qui est le double de ce rang diminué de 1 ou comme le produit du rang par un facteur qui correspond au rang qu'on obtiendrait en écrivant la suite des nombres impairs :

|         |                |                |                 |                 |                 |                  |                  |                   |                   |
|---------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| rang    | 1              | 2              | 3               | 4               | 5               | 6                | 7                | 8                 | 9                 |
| impairs | 1              | 3              | 5               | 7               | 9               | 11               | 13               | 15                | 17                |
| nb hexa | $1=1 \times 1$ | $6=2 \times 3$ | $15=3 \times 5$ | $28=4 \times 7$ | $45=5 \times 9$ | $66=6 \times 11$ | $91=7 \times 13$ | $120=8 \times 15$ | $163=9 \times 17$ |



- Chercher, par essais, le rang qui donne un tel produit proche de 1000.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte et complète (le 32<sup>e</sup> nombre carré, 1 024 et le 23<sup>e</sup> nombre hexagonal, 1 035) avec explications détaillées (suites complètes ou partielles avec découverte de la formule ou de la règle).
- 3 Réponse correcte et complète avec explications partielles (début des suites sans découverte de la formule ou de la règle).
- 2 Réponse correcte et complète sans explication.  
Ou réponse incomplète (seulement 1 024 et 1 035) sans le rang, avec explications détaillées.
- 1 Réponse correcte et complète pour le nombre carré et début de la suite des nombres hexagonaux.
- 0 Réponse correcte pour le nombre carré sans aucune explication  
Ou incompréhension du problème.

**Niveau : 10**

**Origine : fj, 2016**